

دوفصلنامه علمی - ترویجی کارافن

شماره چهل و چهارم، پاییز و زمستان 1397 (صص 56-49)
شاپای چاپی: 2382-9796 شاپای الکترونیکی: 2538-4430
<http://karafan.tvu.ac.ir>

کارافن

حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی و بررسی درهم‌تنیدگی آن‌ها

امین معتمدی نسب*

استادیار، دانشکده فنی و حرفه‌ای سروش، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، اصفهان، ایران

داود افشار

دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران

تاریخ پذیرش نهایی: 1397/11/01

تاریخ دریافت مقاله: 1397/09/19

چکیده

حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی، ویژه حالت‌های توان دوم عملگر نابودی ابرتقارنی هستند. در این مقاله درهم‌تنیدگی دو دسته از این حالت‌ها را بررسی می‌کنیم. به این منظور پایه‌های متعامد و بهنجار بوزونی را معرفی کرده و با استفاده از آن‌ها حالت‌های ابرهمدوس را به حالت‌های دوکیوبیتی تبدیل می‌کنیم. مشاهده می‌شود که حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی درهم‌تنیده هستند و برخلاف حالت‌های ابرهمدوس تکفوتونی، درهم‌تنیدگی آن‌ها به پارامتر همدوسی وابسته است. برای پارامترهای همدوسی بزرگ، رفتار درهم‌تنیدگی این دو دسته حالت، عکس یکدیگر است اما برای هر دو دسته از حالت‌ها، بیشترین افت‌وخیز درهم‌تنیدگی در پارامترهای همدوسی کوچک رخ می‌دهد.

واژگان کلیدی:

ابرتقارن، تابع توافق، حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی، درهم‌تنیدگی، عملگر نابودی.

* نویسنده مسئول مکاتبات: a.motamedi@hotmail.com

1. مقدمه

ابرتقارن مدلی است که بر پایه تقارن بین بوزون‌ها و فرمیون‌ها بنا شده است. ابرتقارن در طبیعت مشاهده نشده است و دلیل این امر، احتمالاً شکست ابرتقارن در طبیعت باشد؛ باوجوداین، همچنان پژوهش‌هایی در جهت اثبات SUSY با استفاده از اتم‌های سرد و یون‌های به‌تله‌افتاده در جریان است.⁽¹⁾ برای ساخت نظریه‌ای که شامل شکست ابرتقارن باشد، ویتن مدل ابرتقارن کوانتومی را پیشنهاد داد.⁽²⁾ در این مدل، روش‌های سودمندی برای بررسی مسائل مختلف در مکانیک کوانتومی ارائه می‌شود که از جمله می‌توان به ارتباط بین ترازهای انرژی و ویژه توابع دو پتانسیل متفاوت اشاره کرد.

نوسانگر هماهنگ بوزونی یکی از سیستم‌های پُرکاربرد در فیزیک است. در این سیستم، جبر موجود بین هامیلتونی و عملگرهای آفرینش و نابودی، جبر هایزنبرگ است. این جبر که حالت‌های همدوس مرتبط با آن در توصیف کوانتومی نور بسیار اهمیت دارند، حالت خاصی از جبر چندجمله‌ای هایزنبرگ است که در آن، عملگرهای آفرینش و نابودی بوزونی با توان m آن‌ها جایگزین می‌شوند $(\hat{a}_0^0 \hat{a}^m, \hat{a}_0^0 \hat{a}^{\dagger m})$.⁽³⁻⁵⁾ حالت‌های همدوسی را که در این وضعیت با استفاده از عملگر نابودی به دست می‌آیند، حالت‌های همدوس چندفوتونی می‌نامند.⁽⁶⁻⁸⁾ برخلاف حالت‌های همدوس که در مرز کوانتوم و کلاسیک قرار دارند، این حالت‌ها دارای برخی ویژگی‌های غیرکلاسیکی بارز هستند. در حالت خاص، $m = 2$ ، نشان داده می‌شود که ویژه‌حالت‌های متناظر معادل تعریف برهم‌نهی زوج و فرد حالت‌های همدوس نیز هستند.⁽³⁾ این حالت‌ها اثر پادخوشه‌ای و فشردگی را نشان می‌دهند و ویژگی‌های غیرکلاسیکی این حالت‌ها به دلیل کاربرد در ارتباط کوانتومی،⁽⁹⁾ انتقال کوانتومی⁽¹⁰⁾ و رمزنگاری کوانتومی⁽¹¹⁾ دارای اهمیت فراوانی است.

ازسوی دیگر، مشابه با حالت‌های همدوس بوزونی، حالت‌های ابرهمدوس را می‌توان با معرفی یک عملگر نابودی به دست آورد. در سال‌های اخیر، حالت‌های ابرهمدوس کاربردهای گوناگونی یافته‌اند که از آن جمله می‌توان به مدل تعمیم‌یافته جینز - کامینگز⁽¹²⁾، نگاشت‌های فرمیونی - بوزونی⁽¹³⁾ و Q-ballها⁽¹⁴⁻¹⁵⁾ اشاره کرد. در این مقاله، درهم‌تنیدگی حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی را که به‌تازگی معرفی شده‌اند، به دست می‌آوریم؛ از این رو پیکربندی مقاله بدین صورت است که در بخش دوم برای نوسانگر هماهنگ ابرمتقارن، حالت‌های ابرهمدوس چندفوتونی را به‌صورت اجمالی بررسی می‌کنیم. در بخش سوم، درهم‌تنیدگی آن‌ها را مطالعه کرده و بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری می‌پردازد.

2. حالات‌های ابرهمدوس چندفوتونی

یکی از روش‌های یافتن حالات‌های همدوس، تعریف آن‌ها به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی است. عملگر نابودی حالت سیستم را به تراز پایین‌تر منتقل می‌کند ($\hat{A}|y_n\rangle = |y_{n-1}\rangle$). در فضای هیلبرت مرکب از فضاهای هیلبرت بوزونی و فرمیونی، عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ ابرمتقارن می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود: (16)

$$\hat{A} = \hat{a} \cdot I_f + I_b \cdot \hat{f}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{a} & 1 \\ 0 & \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن \hat{a} و \hat{f} به ترتیب عملگرهای نابودی فرمیونی و بوزونی هستند؛ همچنین I_b و I_a به ترتیب عملگرهای یکه در زیرفضای فرمیونی و بوزونی هستند. این عملگر به دلیل ترکیب عملگرهای نابودی زیرسیستم‌ها اهمیت دارد. عملگر (2) در شرط‌های اساسی زیر برای یک عملگر نابودی صدق می‌کند: (17)

$$\hat{A} \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \hat{A} = w \hat{A}, \quad \hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{A} \hat{A}^\dagger = -w \hat{A}^\dagger \quad (2)$$

که در آن \hat{H}_s هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ابرمتقارن به‌صورت زیر است:

$$\hat{H}_s = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2} w^2 \hat{x}^2 - \frac{1}{2} w s \hat{z} = \hat{H}_b - \frac{1}{2} w s \hat{z} \quad (3)$$

حالات‌های هامیلتونی بالا به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$y_n = a_1 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \end{pmatrix}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

با استفاده از معادلات (1) و (4) و همچنین معادله ویژه‌مقداری $\hat{A}^2|Z\rangle = z|Z\rangle$ ، حالات‌های ابرهمدوس دوفوتونی به‌صورت زیر به دست می‌آیند: (3)

$$|Z, m, j\rangle = c_1 |Z, m, j\rangle_f + c_2 |Z, m, j\rangle_s, \quad c_1, c_2 \hat{1} \quad (5)$$

که در آن:

$$|Z, m, j\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{a}^* \\ 0 \end{pmatrix} |z, m, s_j\rangle - \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} |z, m, s_j\rangle, \quad |Z, m, j\rangle_f = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ 0 \end{pmatrix} |z, m, s_j\rangle \quad (6)$$

$$s_j = (j+1)(1 - d_{(m-1),j}), \quad |z, m, s_j\rangle = \hat{a}^\dagger |z, m, s_j\rangle$$

در روابط (5) و (6)، $|z, m, j\rangle = \hat{a} \frac{z^{m+j}}{(mn+j)!} |mn+j\rangle$ ، حالت غیربهنجار بوزونی تعریف می‌شود.

همچنین حالت‌های m با مقادیر $j = 0, \dots, m-1$ در معادله (5)، ویژه‌حالت عملگر \hat{A}^m هستند. برای $m = 2$ با توجه به مقادیر $j = 0, 1$ می‌توان دو ویژه‌حالت عملگر نابودی را به‌عنوان حالت ابرهمدوس تعریف کرد. در این حالت فضای هیلبرت سیستم به دو زیرفضا تجزیه می‌شود و طیف انرژی هامیلتونی سیستم، برابر مجموع طیف‌های انرژی دو زیرفضا است:

$$E_{SUSY} = (E_0^0 + E_1^0 + \dots) \mathbf{U} (E_0^1 + E_1^1 + \dots) \quad (7)$$

3. درهم‌تنیدگی حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی

برای محاسبه درهم‌تنیدگی حالت‌های به‌دست‌آمده از تابع توافق استفاده می‌کنیم. برای حالت خالص دوکیوبیتی زیر:

$$|y^{AB}\rangle = a|0^A, 0^B\rangle + b|0^A, 1^B\rangle + c|1^A, 0^B\rangle + d|1^A, 1^B\rangle \quad (8)$$

تابع توافق به‌صورت زیر به دست می‌آید: (18)

$$C(y^{AB}) = 2|ad - bc| \quad (9)$$

در حالتی که $m = 2, j = 0$ است، حالت ابرهمدوس دوفوتونی را پس از کمی عملیات ریاضی به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|Z\rangle_{2,0} = N_2^0 \left[\frac{c_1}{\sqrt{2}} \left(|z\rangle_{\frac{+}{\emptyset}} + |-z\rangle_{\frac{+}{\emptyset}} \right) + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \left(|z\rangle_{\frac{-}{\emptyset}} + |-z\rangle_{\frac{-}{\emptyset}} \right) - (|z\rangle_{\frac{+}{\emptyset}} + |-z\rangle_{\frac{+}{\emptyset}}) \right] \quad (10)$$

که در آن ضریب بهنجارش N_2^0 با استفاده از شرط $\langle Z|Z\rangle_{2,0} = 1$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$|N_2^0|^2 = \left(4|c_1|^2 \cosh|z|^2 + 4|c_2|^2 \cosh|z|^2 + 4|c_2|^2 |z|^2 e^{-|z|^2} \right)^{-1} \quad (11)$$

اینک با استفاده از روش مراجع (19-21) پایه‌های متعامد و بهنجار زیرفضاهای بوزونی و فرمیونی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_f &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 |0\rangle_b &= \frac{1}{2\sqrt{\cosh|z|^2}} (|z\rangle + |-z\rangle), \\
 |1\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{F}} (z^* (|z\rangle - |-z\rangle) - (|z\rangle^e + |-z\rangle^e))
 \end{aligned} \tag{12}$$

که در آن $F = -8|z|^2 e^{-|z|^2} + 4\cosh|z|^2$ است. اینک با استفاده از معادله (12)، معادله (10) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|Z\rangle = N_2^0 \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \sqrt{\cosh|z|^2} |0\rangle_b |0\rangle_f + \sqrt{\frac{F}{2}} c_2 |1\rangle_b |0\rangle_f + c_2 \sqrt{2\cosh|z|^2} |0\rangle_b |1\rangle_f \tag{13}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (9) درهم‌تنیدگی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$C = 2|c_2|^2 \sqrt{F \cosh|z|^2} |N_2^0|^2 \tag{14}$$

به طریق مشابه در حالت $m=2, j=1$ داریم:

$$|Z\rangle_{2,1} = N_2^1 \left(c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \right) \tag{15}$$

با تعریف پایه‌های متعامد و بهنجار زیر:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_f &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 |0\rangle_b &= \frac{1}{2\sqrt{\sinh|z|^2}} (|z\rangle - |-z\rangle), \\
 |1\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{G}} (z^* (|z\rangle + |-z\rangle) - (|z\rangle^e - |-z\rangle^e))
 \end{aligned} \tag{16}$$

که در آن $G = 8|z|^2 e^{-|z|^2} + 4\sinh|z|^2$ است، معادله (16) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|Z\rangle = N_2^1 \left(2c_1 \sqrt{\sinh|z|^2} |0\rangle_b |0\rangle_f + \sqrt{\frac{G}{2}} c_2 |1\rangle_b |0\rangle_f + c_2 \sqrt{2\sinh|z|^2} |0\rangle_b |1\rangle_f \right) \tag{17}$$

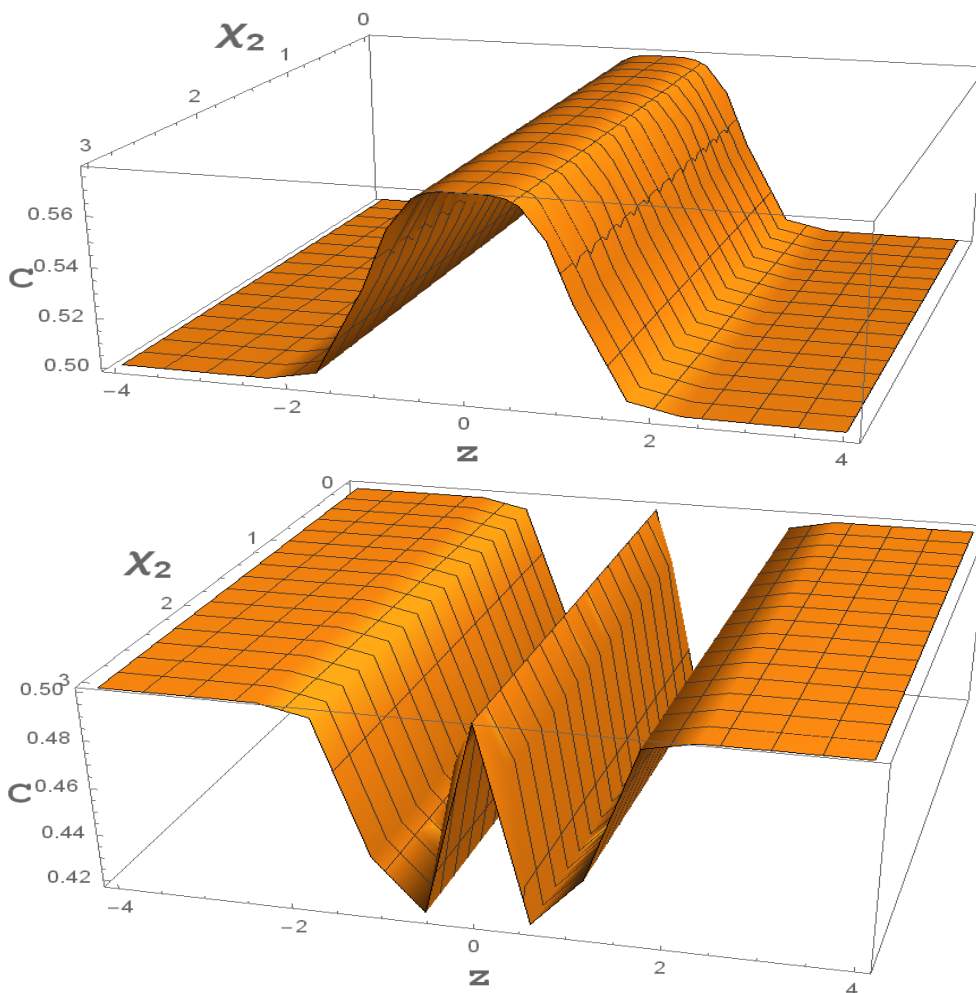
درهم‌تنیدگی حالت ابرهمدوس دوفوتونی $|Z\rangle_{2,1}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2|c_2|^2 \sqrt{G \sinh|z|^2} |N_2^1|^2 \quad (18)$$

که در آن ضریب بهنجارش به صورت زیر است:

$$|N_2^1|^2 = \left(4|c_1|^2 \sinh|z|^2 + 4|c_2|^2 \sinh|z|^2 + 4|c_2|^2 |z|^2 e^{-|z|^2} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} \quad (19)$$

در شکل زیر درهم تنیدگی حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی $|Z\rangle_{2,0}$ و $|Z\rangle_{2,1}$ با فرض $c_1 = c_2$ برحسب پارامتر همدوسی و C_2 رسم شده است.



شکل 1. نمودار درهم تنیدگی حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی با فرض $c_1 = c_2$

(ب) $m = 2, j = 1$

(الف) $m = 2, j = 0$

همان‌گونه که از شکل پیداست، درهم‌تنیدگی حالت‌های ابرهمدوس دوفوتونی $m=2, j=0$ ، در z ‌های کوچک دارای افت‌وخیز است و در پارامترهای بزرگ همدوسی، درهم‌تنیدگی به سمت بیشینه خود یعنی $C=0.5$ میل می‌کند. رفتار درهم‌تنیدگی حالت ابرهمدوس دوفوتونی $m=2, j=1$ متفاوت است. درهم‌تنیدگی این حالت‌ها با افزایش پارامتر همدوسی به سمت کمینه خود $C=0$ میل می‌کند.

4. نتیجه‌گیری

حالت‌های ابرهمدوس چندفوتونی ویژه‌حالت توان m از عملگر نابودی هستند. این حالت‌ها دارای ویژگی‌های غیرکلاسیکی قوی هستند. در این مقاله برای حالت خاص $m=2$ که عملگر نابودی دارای دو ویژه‌مقدار است، درهم‌تنیدگی را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. نتایج نشان می‌دهند درهم‌تنیدگی به پارامتر همدوسی وابسته است و در پارامترهای همدوسی بزرگ، رفتار این دو حالت عکس یکدیگر است. همچنین در هر دو حالت، درهم‌تنیدگی در پارامترهای همدوسی کوچک دارای افت‌وخیز است؛ حال آنکه درهم‌تنیدگی در حالت $m=1$ (حالت‌های ابرهمدوس) که در مرجع (21) مورد بررسی قرار گرفته است، به پارامتر همدوسی بستگی ندارد.

منابع

1. Tomka, M.; Pletyukhov, M & Gritsev, V. (2015), "Supersymmetry in quantum optics and in spin-orbit coupled systems", *Sci. Rep-UK*, 5, 13097.
2. Witten, E. (1981), "Dynamical breaking of supersymmetry", *Nucl. Phys. B*, 185, 513-554.
3. Celeita, M. C; Bautista, E. D & Fernandez, D. J. (2019), "Polynomial Heisenberg algebras, multiphoton coherent states and geometric phases", *Phys. Scripta*, 94, 045203.
4. Perelomov, A. M. (1972), "Coherent states for arbitrary Lie group", *Comm. Math. Phys*, 26, 222-236.
5. Barut, A. O & Giradello, L. (1971), "New coherent" states associated with non-compact groups", *Comm. Math. Phys*, 21, 41-55.
6. Buzzek, V; Jex, I & T. Quang (1990), "K-Photon coherent states", *J. Mod. Optics*, 37, 159-163.
7. Buzek, V. (1990), "SU (1,1) squeezing of SU (1,1) generalized coherent states", *J. Mod. Optics*, 37, 303-316.
8. Sun, J; Wang, J & Wang, C. (1992), "Generation of orthonormalized eigenstates of the operator a_k (for $k \geq 3$) from coherent states and their higher-order squeezing", *Phys. Rev. A*, 46, 1700-1702.
9. Bennett, C. H; Shor, P. W; Smolin, J. A & Thapliyal, A. V. (1999), "Entanglement-assisted classical capacity of noisy quantum channels", *Phys. Rev. Lett*, 83, 3081-3084.
10. Braunstein, S. L; Ariano, G. M. D; Millburn, G. J & Sacchi, M. F. (2000), "Universal teleportation with a twist", *Phys. Rev. Lett*, 84, 3486-3489.
11. Bennett, C. H; Brassard, G & Mermin, N. D. (1992), "Quantum cryptography without Bells theorem", *Phys. Rev. Lett*, 68, 557-559.
12. Daoud, M & Douari, J. A. (2003), "A generalized Jaynes-Cummings model: nonlinear dynamical superalgebra $u(1/1)$ and dupercoherent states", *Int. J. Mod. Phys. B*, 17, 2473-2486.
13. Dobaczewski, J; Scholtz, F. G & Geyer, H. B. (1993), "Boson-fermion mappings for odd systems from supercoherent states", *Phys. Rev. C*, 48, 2313-2325.
14. Kusenko, A & Shaposhnikov, M. (1998), "Supersymmetric Q-balls as dark matter", *Phys. Lett. B*, 418, 46-54.
15. Kusenko, A; Kuzmin, V; Shaposhnikov, M & Tinyakov, P. G. (1998), "Experimental signatures of supersymmetric dark-matter Q-balls", *Phys. Rev. Lett*, 80, 3185-3188.
16. Aragone, C & Zypman, F. (1986), "Supercoherent states", *J. Phys. A: Math. Gen*, 19, 2267-2279.
17. Kornbluth, M & Zypman, F. (2013), "Uncertainties of coherent states for a generalized supersymmetric annihilation operator", *J. Math. Phys*, 54, 012101-1-13.
18. Hill, S & Wootters, W. K. (1997), "Entanglement of a pair of quantum bits", *Phys. Rev. Lett*, 78, 5022-5025.
19. Afshar, D; Motamedinasab, A; Anbaraki, A & Jafarpour, M. (2016), "Even and odd coherent states of supersymmetric harmonic oscillators and their nonclassical properties", *Int. J. Mod. Phys. B*, 30, 1650026-1-11.
20. Wang, X & Sanders, B. C. (2001), "Multipartite entangled coherent states", *Phys. Rev. A*, 65, 012303-1-7.
21. Motamedinasab, A; Afshar, D & Jafarpour, M. (2018), "Entanglement and non-classical properties of generalized supercoherent states", *Opik*, 157, 1166-1176.